На правах рукописи

Жуков Дмитрий Александрович

MG-деформации поверхностей положительной гауссовой кривизны

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2012

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО
«Таганрогский государственный педагогический институт имени А. П. Чехова»
на кафедре алгебры и геометрии.

Научный руководитель:	заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор *Фоменко Валентин Трофимович*.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор *Бикчантаев Ильдар Ахмедович*; доктор физико-математических наук, профессор *Шикин Евгений Викторович*.
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет».

Защита состоится 20 декабря 2012 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан _____ ноября 2012 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико-математических наук, доцент	Липачёв Евгений Константинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современной геометрии важным направлением является теория деформаций поверхностей. Существует большое число разновидностей бесконечно малых и непрерывных деформаций, самыми изученными из них являются деформации, сохраняющие длины дуг на поверхности – изгибания. Именно с бесконечно малых изгибаний берет свое начало теория деформаций. Бесконечно малые изгибания получили широкое распространение и развитие в XX веке. Изгибания изучались в работах В. Бляшке, С. Э. Кон-Фоссена, Г. Либмана, Р. Зауера, А. Д. Александрова, А. В. Погорелова, Н. В. Ефимова, В. Т. Фоменко, И. Х. Сабитова, С. Б. Климентова, П. Е. Маркова и многих других.

Благодаря тому, что изгибания на данный момент хорошо изучены, актуально изучение деформаций, отличающихся от изгибаний. Перечислим некоторые из них: ареальные (А-деформации), конформные, геодезические, бесконечно малые деформации с сохранением асимптотической сети линий или сети линий кривизны, эквиареальные деформации, бесконечно малые деформации, сохраняющие объект связности, деформации, сохраняющие грассманов образ поверхности (G-деформации), AG-деформации, ARG-деформации. Указанные деформации изучались в работах В. Т. Фоменко, И. А. Бикчантаева, М. С. Синюкова, С. Г. Лейко, Л. Л. Бескоровайной, А. В. Забеглова, О. Н. Бабенко, В. В. Сидорякиной и многих других.

Одними из актуальных в настоящее время деформаций являются G-деформации, которые, по определению, сохраняют поточечно грассманов образ поверхности. Этот вид деформаций изучался В. Т. Фоменко, И. А. Бикчантаевым, В. А. Горькавым, ими получен ряд результатов, описывающих свойства G-деформаций двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве. Вопросами восстановления поверхности по заданному грассманову образу, тесно примыкающими к G-деформациям, занимались Ю. А. Аминов и А. А. Борисенко.

Особый интерес представляет изучение G-деформаций в трехмерном евклидовом пространстве E^3, так как для двумерных поверхностей в E^3 существует широкое множество G-деформаций, отличных от тривиальных. Для того, чтобы их изучать, накладывают дополнительные условия на G-деформации. В случае непрерывных G-деформаций условие накладывают на приращение некоторой функции, а в случае бесконечно малых G-деформаций на вариацию такой функции. Этим способом были введены некоторые виды деформаций, например, AG-деформации (G-деформации, при которых сохраняется элемент площади поверхности), изучавшиеся в работах В. Т. Фоменко, А. В. Забеглова, О. Н. Бабенко.

В настоящее время представляет интерес изучение обобщений бесконечно малых AG-деформаций. Одним из примеров таких обобщений, изучающихся в настоящее время, являются ARG-деформации.

Сохранение элемента площади поверхности эквивалентно равенству нулю вариации гауссовой кривизны, поэтому для дальнейшего изучения нами выбрано условие $\delta K = \sigma$, где $\delta K -$ вариация гауссовой кривизны деформируемой поверхности, σ – заданная функция класса $D_{1,p}, p > 2,$ на деформируемой поверхности. Известная проблема Минковского состоит в решении вопроса о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности, которая имеет заданное произведение главных радиусов кривизны (величина обратная гауссовой кривизне), поэтому бесконечно малые G-деформации, при условии $\delta K = \sigma,$ получили название бесконечно малых MG-деформаций.

Исследованию бесконечно малых MG-деформаций поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве посвящена данная диссертация. Эти деформации впервые введены и рассмотрены автором в работах [1], [5] и [7].

Цель работы. Целью данной работы является исследование бесконечно малых MG-деформаций замкнутой выпуклой поверхности $\widetilde{S}$ положительной гауссовой кривизны и элементарной односвязной поверхности S положительной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве с краем при различных условиях геометрического типа, наложенных на край поверхности, а также применение полученных результатов при исследовании других видов деформаций.

Научная новизна диссертации. Научная новизна работы состоит в следующем:

- введено понятие бесконечно малой MG-деформации;
- получена система дифференциальных уравнений, описывающая бесконечно малые MG-деформации;
- доказаны теоремы существования и единственности бесконечно малой MG-деформации с точечной связью для элементарной односвязной поверхности S положительной гауссовой кривизны с краем при нескольких условиях геометрического типа, наложенных на край поверхности;
- изучены бесконечно малые MG-деформации замкнутой выпуклой поверхности положительной гауссовой кривизны;

- введено понятие бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн;

- получена система дифференциальных уравнений, описывающая этот вид деформаций;

- доказаны теоремы существования и единственности бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн с точечной связью для элементарной поверхности S положительной гауссовой кривизны с краем при нескольких условиях геометрического типа, наложенных на край поверхности;

- при доказательстве теорем существования и единственности бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн использованы результаты полученные при изучении бесконечно малых MG-деформаций.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы как для дальнейшего изучения бесконечно малых MG-деформаций и бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн, так и в других исследованиях по геометрии.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на международной научной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, 17-22 апреля 2011 г.), международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (Ростов-на-Дону, 22-26 апреля 2012 г.), международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований ‘2011» (Одесса, 15-28 марта 2011 г.) и XI Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (весенняя сессия, Кисловодск, 1-8 мая 2010 г.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в девяти работах, список которых приводится в конце автореферата. Публикации [1] – [3] осуществлены в журналах, входивших в список ВАК России на момент публикации, работы [5], [6] и [9] опубликованы в материалах международных конференций.

Связь работы с научными проектами и заданиями. Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А. П. Чехова» (проект

№ 1.423.2011), «Реализация метрик положительной кривизны в виде поверхностей с заданной опорой», научный руководитель – Фоменко В. Т.

Структура диссертации. Диссертация состоит из содержания, введения, четырех глав и списка литературы из 28 названий. Объем диссертации составляет 108 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации собраны сведения из теории обобщенных аналитических функций, краевых задач для систем уравнений эллиптического типа, а также некоторые свойства вращений векторного поля, необходимые для исследования.

В § 1 описываются все классы функций, используемые в работе, а также связанные с ними понятия. В § 2 описывается понятие сопряженно изометрической системы координат. В § 3 вводится в рассмотрение понятие вычета поверхности относительно поля направлений. Также в третьем параграфе приводятся примеры сетей линий на поверхности и их вычетов. Приведем некоторые важные определения.

Рассмотрим односвязную поверхность S класса $D_{3,p}, p>2$, с краем ∂S класса $C^1_\rho, 0<\rho\le 1$, гомеоморфно отображающуюся на плоскую область Ω. *Положительным направлением обхода* контура ∂S будем называть направление, оставляющее поверхность слева. Зададим вдоль ∂S на поверхности S непрерывное поле направлений R, не имеющее особых точек.

Зададим в некоторой точке Q кривой ∂S направление поля R стрелкой, выбирая произвольно одну из возможностей. Отметим также в точке Q касательный вектор к кривой ∂S, направив его в положительном направлении. Обозначим через ρ угол, отсчитываемый от касательного вектора до стрелки, изображающей направление R, против хода часовой стрелки.

Вычетом поверхности S относительно поля направлений R будем называть число $V_R(S)=\dfrac{1}{\pi}\Delta_{\partial S}\rho$, где $\Delta_{\partial S}\rho$ – приращение угла ρ, при обходе контура ∂S в положительном направлении.

Четвертый параграф посвящен эллиптическим системам уравнений с частными производными в общем виде и в каноническом виде с коэффициентами класса L_p, $p>2$, и неизвестными функциями U и V. Ввод в рассмотрение неизвестной функции $w(z)=U+iV$, где $z=u+iv$, $i^2=-1$, $(u,v)\in\Omega$ – односвязная область позволяет записать общую систему уравнений в виде одного комплексного уравнения $\partial_{\bar z}w-q_1(z)\partial_z w-q_2(z)\partial_z\overline{w}+\widetilde{A}w+\widetilde{B}\overline{w}=\widetilde{F}$, где $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{F}\in L_p$, $p>2$, функции q_1, q_2 измеримы и $|q_1(z)|+|q_2(z)|\le q_0<1$. Каноническая система уравнений записывается в виде уравнения $\partial_{\bar z}w+Aw+B\overline{w}=F$, где $A,B,F\in L_p$, $p>2$. Если правые части комплексных уравнений тождественно равны нулю, то уравнения называют *однородными*, в противном случае *неоднородными*.

В § 4 также обсуждается метод построения решений полученных комплексных уравнений, указываются свойства решений, производится запись краевого условия $\alpha U+\beta V=\gamma$ в комплексной форме $\mathrm{Re}\{\overline{\lambda(z)}w(z)\}=\gamma$, где $\lambda=\alpha+i\beta\in C_\rho(\partial\Omega)$.

Присоединяем к полученным комплексным уравнениям краевое условие, в результате получаются две краевые задачи Римана-Гильберта. Задача для комплексного уравнения, полученного из канонической системы, называется в работе задачей A, из общей – задачей $\widetilde{A}$, в случае однородных комплексных уравнений и $\gamma\equiv 0$, рассматриваемые задачи называются задачами $\overset{\circ}{A}$ и $\overset{\circ}{\widetilde{A}}$, соответственно.

В § 5 описывается понятие индекса функции, и приводятся некоторые его свойства.

Индексом функции λ будем называть целое число, обозначаемое $Ind\lambda$, равное деленному на 2π приращению аргумента функции λ при обходе границы $\partial\Omega$ области Ω в направлении, оставляющем область слева, т. е. $Ind\lambda=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\Omega}\arg\lambda$.

Основным методом доказательства существования и единственности бесконечно малых MG-деформаций, а также бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн, является применение признаков разрешимости краевых задач A и $\widetilde{A}$ по И. Н. Векуа, которые приводятся в § 6 в виде теорем 5 и 6:

Теорема 5. Если $Ind\lambda\ge 0$, то:

1) задачи $\overset{\circ}{A}$ и $\overset{\circ}{\widetilde{A}}$ имеют $(2Ind\lambda+1)$ линейно независимых решений;

2) задачи A и $\widetilde{A}$ всегда разрешимы, при этом общее решение задачи A дается формулой $w(z)=w_A(z)+\sum\limits_{j=1}^{2Ind\lambda+1} c_j w_j(z)$, где c_j – произвольные вещественные постоянные, w_A – частное решение неоднородной задачи A, w_j – полная система решений однородной задачи $\overset{\circ}{A}$, $j=1,2,...,(2Ind\lambda+1)$, решение задачи $\widetilde{A}$ зависит от $(2Ind\lambda+1)$ произвольных вещественных постоянных.

Теорема 6. Если $Ind\lambda<0$, то:

1) задачи $\overset{\circ}{A}$ и $\overset{\circ}{\widetilde{A}}$ не имеют нетривиальных решений;

2) задача A имеет решение (и притом единственное) тогда и только тогда, когда выполняются $(-2Ind\lambda-1)$ условий разрешимости;

3) задача $\widetilde{A}$ имеет решение (и притом единственное) тогда и только тогда, когда выполняются $(-2Ind\lambda-1)$ условий разрешимости.

Глава вторая полностью посвящена исследованию бесконечно малых MG-деформаций односвязной поверхности *S* положительной гауссовой кривизны с краем.

В первом параграфе второй главы вводятся понятия бесконечно малой MG-деформации, векторного поля деформации, заданной на поверхности известной функции σ, точечной связи, а также задается регулярность вводимых функций.

Рассмотрим деформацию S_t, $t\in(-t_0,t_0)$, $t_0>0$, поверхности *S*, задавая ее уравнением $\vec{r}_t=\vec{R}(u,v,t)$, где $(u,v)\in\Omega$, $\vec{R}(u,v,t)$ – функция класса $D_{3,p}, p>2$, по параметрам u,v и класса C^2 по параметру *t*, $\vec{R}(u,v,0)\equiv\vec{r}(u,v)$.

Векторное поле $\left.\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta\vec{r}$ обозначим через $\vec{y}$ и будем называть *векторным полем деформации*. Будем в дальнейшем считать, что $\vec{y}=\vec{y}(u,v)\in D_{3,p}$, $p>2$. Две деформации называются *эквивалентными*, если их векторные поля деформаций равны. Каждый класс эквивалентных деформаций будем называть *бесконечно малой деформацией* поверхности *S*.

Определение 1. *Бесконечно малой G-деформацией* называется бесконечно малая деформация поверхности *S*, при которой поточечно сохраняется сферический образ поверхности *S*, аналитически это условие записывается в виде: $\delta\vec{n}=0$, где $\delta\vec{n}$ – вариация единичного вектора нормали поверхности *S*.

Зададим на поверхности *S* функцию $\sigma\in D_{1,p}, p>2$.

Определение 2. *Бесконечно малой MG-деформацией* называется бесконечно малая G-деформация поверхности *S*, при которой выполняется условие: $\delta K = \sigma$, где δK – вариация гауссовой кривизны поверхности *S*.

Отметим на поверхности *S* точку M_0 и потребуем, чтобы точка M_0 при деформации смещалась на заданный вектор $\vec{C}$, это условие будем называть *точечной связью*. Аналитически точечная связь записывается в виде:

$$\vec{y}(M_0) = \vec{C}\,. \qquad (*)$$

Во втором параграфе выводится система уравнений, описывающая бесконечно малые MG-деформации поверхности *S* положительной гауссовой кривизны с точечной связью в трехмерном евклидовом пространстве. Для этого используются известные соотношения, характеризующие бесконечно малые G-деформации: $\partial_j \vec{y} = \alpha_j^k \partial_k \vec{r},\ j = 1{,}2$, где α_j^k – некоторые скалярные функции от u, v, применяются деривационные формулы Гаусса и учитывается выбор изометрически сопряженной системы координат. Далее, вводим обозначения $U = \frac{1}{2}(\alpha_2^2 - \alpha_1^1)$, $V = \alpha_1^2$, $\Pi = \frac{1}{2}(\alpha_2^2 + \alpha_1^1)$, имеем:

$$\begin{cases} \partial_1 U - \partial_2 V + 2\Gamma_{12}^2 U + (\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2)V = \partial_1\left(\dfrac{\sigma}{2K}\right), \\ \partial_2 U + \partial_1 V + 2\Gamma_{21}^1 U + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1)V = -\partial_2\left(\dfrac{\sigma}{2K}\right). \end{cases}$$

Полученная система уравнений описывает бесконечно малые MG-деформации, имеет две неизвестных функции *U* и *V*. Решив эту систему уравнений, можно однозначно определить вектор деформации $\vec{y}$ в произвольной точке *M* поверхности *S* по формуле: $\vec{y}(M) = \int_{M_0}^{M} d\vec{y} + \vec{C}$.

В третьем параграфе вводятся в рассмотрение краевые условия геометрического типа, налагаемые на край поверхности. Эти условия представляют собой задание вариации некоторого инварианта *P* вдоль края поверхности в выбранном направлении *R*. После преобразований становится очевидным, что проблема существования бесконечно малой MG-деформации поверхности *S*, при условии $\delta P_R = \psi$ вдоль края ∂S, сводится к исследованию вопроса о разрешимости краевой задачи для системы уравнений бесконечно малых MG-деформаций с краевым условием $\delta P_R = \psi$, где ψ – заданная функция класса C_ρ, $0 < \rho < 1$.

Если вариацию инварианта P можно представить в виде $\delta P = \left(\alpha_1^1 a_1 + \alpha_1^2 a_2 + \alpha_2^2 a_3\right)\cdot\varphi$, где a_1, a_2, a_3, φ – известные функции класса C_ρ, $0<\rho<1$, $(a_3-a_1)^2+(a_2)^2 \neq 0$, $\varphi \neq 0$, то краевое условие $\delta P_R = \psi$ может быть переписано в виде: $U(a_3-a_1)+Va_2 = \dfrac{\sigma}{2K}(a_3+a_1)+\dfrac{\psi}{\varphi}$.

В четвертом параграфе полученная краевая задача записывается в комплексной форме. При этом система уравнений бесконечно малых MG-деформаций записывается в следующем виде: $\partial_{\bar z} w + A_1 w + B_1 \overline{w} = F$, где $A_1 = \frac{1}{4}(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2) - \frac{i}{4}(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{21}^1)$, $B_1 = \frac{1}{4}(\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2) + \frac{i}{4}(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)$, $F = \dfrac{1}{2}\partial_z\left(\dfrac{\sigma}{K}\right)$. Краевое условие переписывается в виде: $\mathrm{Re}\{\overline{\lambda} w\} = \gamma$, где $\gamma = \dfrac{\sigma}{2K}(a_3+a_1)+\dfrac{\psi}{\varphi}$. Также в четвертом параграфе проверяется выполнение условие регулярности относительно данных полученной краевой задачи, таким образом устанавливается, что полученная краевая задача есть задача *A*, формулируются и доказываются две леммы, необходимые для вычисления индексов конкретных краевых условий.

В пятом параграфе доказываются теоремы существования и единственности бесконечно малых MG-деформаций при некоторых краевых условиях. В каждом случае краевое условие приводится к виду, удобному для вычисления индекса, для этого применяются многочисленные свойства индекса и проводятся соответствующие оценки и, наконец, вычисляется индекс, а затем, с помощью теорем 5 и 6, доказываются теоремы 7 – 13 и следствия 1 – 6.

Зададим на поверхности *S* поле направлений *R* отношением (ξ:η). Отметим на краю поверхности ∂S произвольно выбранную точку *Q*. Изобразим в этой точке направление *R* стрелкой.

Теорема 7. Пусть первая квадратичная форма односвязной поверхности *S* вдоль края ∂S в направлении *R* имеет заданное приращение ψ при бесконечно малой MG-деформации с точечной связью (∗). Тогда:

1) если $V_R(S) > -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая MG-деформация поверхности *S*, соответствующая бесконечно малому параллельному переносу поверхности *S* в E^3 на заданный вектор $\vec{C}$;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая MG-деформация поверхности S существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют ($2V_R(S)+3$) условиям разрешимости;

2) если $V_R(S) \le -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует ($-2V_R(S)-3$) линейно независимых бесконечно малых MG-деформаций поверхности S;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малые MG-деформации поверхности S существуют и зависят от $(-2V_R(S)-3)$ произвольных вещественных постоянных.

Следствие 1. Пусть первая квадратичная форма односвязной поверхности S вдоль края ∂S в направлении края имеет заданное приращение ψ при бесконечно малой MG-деформации с точечной связью (∗). Тогда:

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая MG-деформация поверхности S, соответствующая бесконечно малому параллельному переносу поверхности S в E^3 на заданный вектор $\vec{C}$;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая MG-деформация поверхности S существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют трем условиям разрешимости.

Теоремы 8 – 12 и следствия 2 – 6 устанавливают аналогичные свойства при задании вдоль края ∂S поверхности S вариаций второй квадратичной формы, нормальной кривизны, четвертой квадратичной формы, сферической кривизны, а также линейной комбинации вариаций первой и второй квадратичных форм. В последнем случае вводятся дополнительные условия на ориентацию поверхности.

Доказана теорема, устанавливающая зависимость бесконечно малых MG-деформаций при задании вдоль края ∂S поверхности S вариации средней кривизны от вычета поверхности S относительно поля главных направлений (обозначим его через $V_{ГН}(S)$).

Теорема 13. Пусть средняя кривизна вдоль края ∂S односвязной поверхности S имеет заданное приращение ψ при бесконечно малой MG-деформации с точечной связью (∗), а край ∂S поверхности S не содержит омбилических точек. Тогда:

1) если $V_{ГН}(S) > -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая MG-деформация поверхности S, соответствующая бесконечно малому параллельному переносу поверхности S в E^3 на заданный вектор $\vec{C}$;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая MG-деформация поверхности *S* существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют $(2V_{ГН}(S)+3)$ условиям разрешимости;

2) если $V_{ГН}(S) \le -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует $(-2V_{ГН}(S)-3)$ линейно независимых бесконечно малых MG-деформаций поверхности *S*;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малые MG-деформации поверхности *S* существуют и зависят от $(-2V_{ГН}(S)-3)$ произвольных вещественных постоянных.

В третьей главе диссертации исследуются бесконечно малые G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн. Этот тип деформации впервые исследуется в данной работе. Важной особенностью изучения G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн является то, что при доказательстве теорем существования и единственности рассматриваемых деформаций используются результаты, полученные для тех же краевых условий в случае бесконечно малых MG-деформаций. Таким образом, в главе третьей показано применение бесконечно малых MG-деформаций к исследованию другого вида деформаций при найденных краевых условиях.

В начале главы вводится понятие бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн.

Определение 3. *Бесконечно малой G-деформацией с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн*, называется бесконечно малая G-деформация поверхности *S*, при которой выполняется условие: $\mu \cdot \delta K + 2H\nu \cdot \delta H = 0$, где δK – вариация гауссовой кривизны поверхности *S*, δH – вариация средней кривизны *H* поверхности *S*, μ и ν – произвольные непрерывные функции параметров (u,v), которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} \mu^2 + \nu^2 \neq 0, \\ \mu \cdot \nu \geq 0. \end{cases}$$

В § 1 выводится система уравнений для данных деформаций:

$$\begin{cases} \partial_{\bar z} w + A_1 w + B_1 \overline{w} = -\partial_z \Pi, \\ \Pi(l_1 + l_3) + \dfrac{w - \overline{w}}{2i} l_2 + \dfrac{w + \overline{w}}{2}(l_3 - l_1) = 0. \end{cases}$$

Система имеет две неизвестные функции w и Π, состоит из двух уравнений, одно из которых является комплексной записью эллиптической системы уравнений в частных производных, а второе выражает линейную зависимость между w и Π. В § 2 система уравнений бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн записывается в виде одного уравнения: $\partial_{\bar{z}} w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\partial_z \overline{w} + \widetilde{A}_1 w + \widetilde{B}_1 \overline{w} = 0$. Во втором параграфе также изучаются условия регулярности коэффициентов данного уравнения.

В § 3 краевое условие геометрического типа, аналогичное рассмотренному в предыдущей главе, записывается для бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн. Имеем: $\mathrm{Re}\{\overline{\chi}w\} = \dfrac{\psi}{\varphi}(l_1 + l_3)$, где
$\chi = \big((l_1+l_3)(a_3-a_1)+(l_1-l_3)(a_3+a_1)\big)+i\big((l_1+l_3)a_2-l_2(a_3+a_1)\big)$, l_1, l_2, l_3 известные функции. Таким образом, получаем краевую задачу для бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн, которая является задачей $\widetilde{A}$. Для того чтобы исследовать разрешимость задачи, необходимо вычислить индекс функции χ, которая имеет громоздкий вид. Эта трудность, преодолевается при выполнении некоторых условий, а именно, если для данных полученной краевой задачи верно неравенство: $-4a_3a_1 + a_2^2 \geq 0$, то $Ind\chi = Ind\lambda$, где $\lambda = a_3 - a_1 + ia_2$.

При выполнении указанных условий, облегчается вычисление индекса функции χ. Этот факт имеет большое значение, так как позволяет доказать теоремы существования и единственности бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн и точечной связью для нескольких краевых условий геометрического типа.

Теорема 14. Пусть первая квадратичная форма поверхности S вдоль края ∂S в направлении R имеет заданное приращение ψ при бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн и точечной связью ($*$). Тогда:

1) если $V_R(S) > -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая G-деформация с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности S, соответствующая бесконечно малому параллельному переносу поверхности S в E^3 на заданный вектор $\vec{C}$;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая G-деформация с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности S существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют $(2V_R(S)+3)$ условиям разрешимости;

2) если $V_R(S) \leq -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует $(-2V_R(S)-3)$ линейно независимых бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S*;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малые G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S* существуют и зависят от $(-2V_R(S)-3)$ произвольных вещественных постоянных.

Следствие 7. Пусть первая квадратичная форма поверхности *S* вдоль края ∂S в направлении края имеет заданное приращение ψ при бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн и точечной связью $(*)$. Тогда:

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая G-деформация с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S*, соответствующая бесконечно малому параллельному переносу поверхности *S* в E^3 на заданный вектор $\vec{C}$;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая G-деформация с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S* существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют трем условиям разрешимости.

Аналогичные факты устанавливаются в теоремах 15 – 19 и следствиях 8 – 12 при задании вдоль края ∂S поверхности *S* в направлении *R* вариаций второй квадратичной формы, нормальной кривизны, четвертой квадратичной формы, сферической кривизны, а также линейной комбинации вариаций первой и второй квадратичных форм. В последнем случае вводятся дополнительные условия на ориентацию поверхности.

Доказана теорема, устанавливающая зависимость бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн и точечной связью от вычета поля главных направлений, при задании вдоль края ∂S поверхности *S* приращения средней кривизны.

Теорема 20. Пусть средняя кривизна вдоль края ∂S односвязной поверхности *S* имеет заданное приращение ψ при бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн и точечной связью $(*)$, а край ∂S поверхности *S* не содержит омбилических точек. И пусть $\mu \neq 0$. Тогда:

1) если $V_{ГН}(S) > -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая G-деформация с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S*, соответствующая бесконечно малому параллельному переносу поверхности *S* в E^3 на заданный вектор $\vec{C}$;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая G-деформация с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S* существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют $(2V_{ГН}(S)+3)$ условиям разрешимости;

2) если $V_{ГН}(S) \le -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует $(-2V_{ГН}(S)-3)$ линейно независимых бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S*;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малые G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн поверхности *S* существуют и зависят от $(-2V_{ГН}(S)-3)$ произвольных вещественных постоянных.

В четвертой главе исследуется бесконечно малая MG-деформация овалоида $\widetilde{S}$ класса $D_{3,p}, p > 2$. Векторное поле MG-деформации $\vec{y}$ также считается принадлежащим классу $D_{3,p}, p > 2$. Если векторное поле $\vec{y}$ имеет вид $\vec{y} = \vec{C}$, то будем говорить, что овалоид является *жестким* относительно бесконечно малых MG-деформаций.

В первом параграфе комплексное уравнение бесконечно малых MG-деформаций приводится к виду, удобному для изучения овалоида: $\partial_{\bar{z}}\widetilde{w} + B_1\overline{\widetilde{w}} = \dfrac{\sqrt{g\sqrt{K}}}{2}\partial_z\left(\dfrac{\sigma}{K}\right)$, где $\widetilde{w} = w\sqrt{g\sqrt{K}}$, g – дискриминант первой квадратичной формы овалоида $\widetilde{S}$. Во втором параграфе доказывается теорема.

Теорема 21. Для каждой функции σ существует единственная бесконечно малая MG-деформация с точечной связью овалоида $\widetilde{S}$ положительной гауссовой кривизны. Овалоид $\widetilde{S}$ является жестким относительно бесконечно малых MG-деформаций тогда и только тогда, когда $\sigma \equiv 0$.

При доказательстве теоремы используются свойства изометрически сопряженной системы координат на плоскости, проводится исследование решения однородного комплексного уравнения MG-деформаций в окрестности бесконечно удаленной точки, применяются свойства обобщенных аналитических функций.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору В. Т. Фоменко, за постановку задачи, постоянное внимание и интерес к данной работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ДИССЕРТАЦИИ

1) введено понятие бесконечно малой MG-деформации;

2) получена система дифференциальных уравнений для бесконечно малых MG-деформаций;

3) найдены условия, которым должны удовлетворять поверхность S и направление R, зафиксированное вдоль края, при которых бесконечно малая MG-деформация элементарной поверхности S положительной гауссовой кривизны с краем и точечной связью, при нескольких требованиях геометрического типа, наложенных на край поверхности, существует и единственна;

4) установлен факт существования и единственности бесконечно малой MG-деформации овалоида положительной гауссовой кривизны для каждой функции σ;

5) найдено необходимое и достаточное условие жесткости овалоида положительной кривизны относительно бесконечно малой MG-деформации;

6) введено понятие бесконечно малой G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн;

7) получена система дифференциальных уравнений, описывающая этот вид деформаций;

8) установлены условия для односвязной поверхности S положительной гауссовой кривизны с краем и направления R, при которых бесконечно малая G-деформации с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн с точечной связью, при нескольких требованиях геометрического типа, наложенных на край поверхности, существует и единственна;

9) найдены условия, при выполнении которых, значительно упрощается поиск индекса краевой задачи для бесконечно малых G-деформаций с нулевой линейной комбинацией вариаций гауссовой и средней кривизн.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в ведущих научных журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Жуков, Д. А. О жесткости овалоида относительно бесконечно малых MG-деформаций / Д. А. Жуков // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17, вып. 5. – С. 719–720. (0,1 п.л.)

2. Жуков, Д. А. Бесконечно малые MG-деформации поверхности положительной гауссовой кривизны при стационарности четвертой квадратичной формы поверхности вдоль края / Д. А. Жуков // Вестник Воронежского государственного университета. – Сер. Физика. Математика. – 2011. – № 2. – С. 85–92. (0,93 п.л.)

3. Жуков, Д. А. Бесконечно малые MG-деформации поверхности положительной гауссовой кривизны при стационарности средней кривизны вдоль края / Д. А. Жуков // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – № 3. – С. 18–25. (0,93 п.л.)

Публикации в других изданиях

4. Жуков, Д. А. О жесткости поверхности, склеенной из кусков поверхностей неотрицательной гауссовой кривизны, относительно бесконечно малых AG-деформаций / Д.А. Жуков // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. – Сер. Физико-математические и естественные науки. – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2010. – № 1. – С. 5–11. (0,75 п.л.)

5. Жуков, Д. А. MG-деформации поверхностей положительной гауссовой кривизны при условии стационарности второй квадратичной формы вдоль края / Д. А. Жуков // Современные направления теоретических и прикладных исследований '2011. Физика и математика: сб. науч. тр. по мат. международ. научно-прак. конф. – Одесса: Черноморье, 2011. – Т. 8. – С. 47–48. (0,12 п.л.)

6. Жуков, Д. А. О бесконечно малых MG-деформациях поверхности положительной гауссовой кривизны с краем при условии стационарности нормальной кривизны вдоль края / Д. А. Жуков // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докладов международной конференции. – Харьков: Апостроф, 2011. – С. 143–144. (0,12 п.л.)

7. Жуков, Д. А. Бесконечно малые MG-деформации поверхности положительной гауссовой кривизны с краем при стационарной вдоль края первой квадратичной форме / Д. А. Жуков // Вестник Таганрогского государственного

педагогического института. – Сер. Физико-математические и естественные науки. – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2011. – № 1. – С. 3–9. (0,88 п.л.)

8. Zhukov, D. A. On infinitesimal MG-deformations of a surface of positive Gaussian curvature with stationarity of normal curvature along the boundary / D. A. Zhukov // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences / Ed. by N. N. Kizilova, G. N. Zholtkevych. – Kharkov: Apostrof, 2011. – P. 377–384. (0,46 п.л.)

9. Жуков, Д. А. О бесконечно малых MG-деформациях поверхности при стационарности средней кривизны вдоль края / Д. А. Жуков // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения: тезисы докладов международной научной конференции. – Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2012. – С. 56. (0,1 п.л.)